1. Michele e i suoi 4 fratelli sono tutti nati nello stesso mese, ma in anni diversi. Moltiplicando fra di loro i quattro numeri che rappresentano le differenze di età (in valore assoluto) fra Michele e i suoi fratelli, si ottiene sempre 9. Sapendo che Michele è nato nel 1962, determinare la somma degli anni di nascita di Michele e dei suoi 4 fratelli.

   $9 = 3 \times 3 \times 1 \times 1$; anni di nascita: 1959, 1961, 1962, 1963, 1965; somma $1962 \times 5 = 9810$.

2. In una scatola ci sono 4000 calzini bianchi, 2000 neri, 1600 rossi, 1000 verdi, 800 gialli e 600 blu. Determinare il numero di calzini che bisogna prendere (tutti insieme) in modo da averne a sufficienza per 2010 persone (ovviamente ogni persona deve avere due calzini dello stesso colore).

   Ci vogliono almeno 4020 calzini. Dato che i colori sono 6, prendendo un numero dispari di calzini possono restare al massimo 5 calzini spaiati. Quindi basta prendere 4025 calzini.

3. Per rendere più variopinta un'aiuola circolare di raggio 4 metri, si tracciano al suo interno due circonferenze di raggi 2 e 3 metri aventi centro nel centro dell'aiuola e due rette incidenti passanti per il centro dell'aiuola. In questo modo l'aiuola risulta essere divisa in 12 regioni. In ciascuna di tali regioni vengono piantati fiori bianchi o rossi, avendo cura che 2 regioni con i fiori dello stesso colore abbiano al più un punto in comune. Sapendo che l'area con i fiori rossi è uguale ad una volta e mezza l'area con i fiori bianchi, determinare la misura in gradi sessagesimali dei 2 angoli più piccoli formati dalle 2 rette.

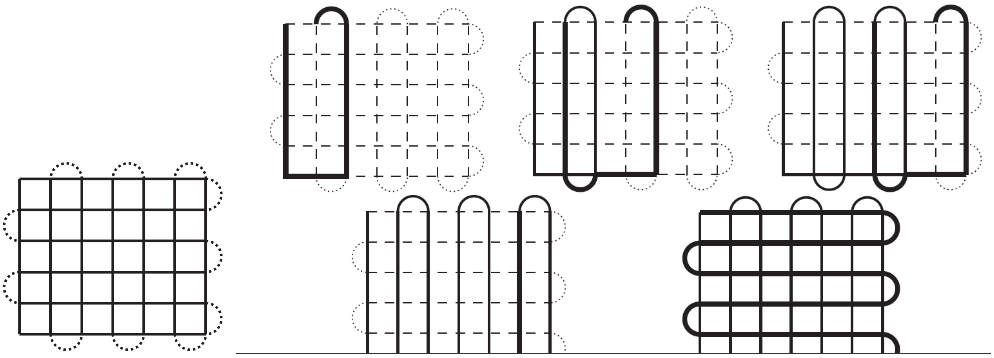
   Si ha $\pi\frac{180-x}{180}2^2+\pi\frac{x}{180}(3^2-2^2)+\pi\frac{180-x}{180}(4^2-3^2) = \frac{3}{2}\left(\pi\frac{x}{180}2^2+\pi\frac{180-x}{180}(3^2-2^2)+\pi\frac{x}{180}(4^2-3^2)\right)$,
   $2\left((180-x)\cdot 2^2 + x\cdot(3^2-2^2)+(180-x)\cdot(4^2-3^2)\right) = 3\left(x\cdot 2^2+(180-x)\cdot(3^2-2^2)+x\cdot(4^2-3^2)\right)$ cioè $2(-6x+1980) = 3(900+6x)$ ed infine $12x+18x = 3960-2700$. Quindi $x = \frac{1260}{30} = 42$.

4. Un tipo disonesto, per ottenere un maggior rimborso spese, ha truccato il contachilometri della propria auto. Dopo la manomissione, tutte le cifre del contachilometri passano direttamente dal 3 al 5 (saltando il 4), e dall'8 allo 0 (saltando il 9). All'inizio dell'anno il contachilometri indicava 2010, ora indica 0102. Determinare quanti chilometri ha al minimo effettivamente percorso l'auto.

   Usando otto cifre invece di dieci, il contachilometri "conta" in base 8 usando le cifre 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7 e 8. Certamente è stata superata la cifra 8888 (visto che c'è uno 0 nella posizione più a sinistra), qundi al minimo il contachilometri dovrebbe segnare 10102 se ci fosse il posto per la quinta cifra. Convertendo nelle usuali cifre da 0 a 7, i numeri 2010 e 10102 restano gli stessi, ma vanno intesi in base 8. Il numero di chilometri percorsi in base 8 è quindi $(10102)_8 - (2010)_8 = (6072)_8$. Convertendo tale numero in base 10 si ha $6 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + 7 \times 8^1 + 2 \times 8^0 = 3072 + 0 + 56 + 2 = 3130$.

5. Un accampamento in un terreno di forma rettangolare è suddiviso da delle stradine in un reticolo di 64×37 quadrati tutti uguali, all'interno di ognuno dei quali c'è una tenda. Ogni notte per controllare la sicurezza all'interno di tale accampamento, una ronda parte da un vertice dell'accampamento e, dopo aver percorso almeno una volta tutte le stradine interne e perimetrali, ritorna al vertice di partenza. Determinare quanto è lunga, come minimo, la strada percorsa dalla ronda (esprimere la risposta assumendo come unita di misura la lunghezza del lato dei quadrati del reticolo).

   Sia l il lato di uno qualunque dei quadrati. Essendo i quadrati disposti in 64 file e 37 colonne, il reticolo di stradine è formato da 65 stradine orizzontali, che costeggiano le 64 file orizzontali, ciascuna lunga $37l$, e 38 verticali, ciascuna lunga $64l$, che racchiudono le 37 file verticali. La lunghezza totale del reticolo è dunque di $65 \times 37l + 64 \times 38l = 4837l$. Non esistono percorsi soddisfacenti le condizioni richieste che siano di tale lunghezza: infatti, essendo il percorso una linea chiusa, in ogni nodo devono confluire un numero pari di stradine (per ogni stradina di "arrivo" nel nodo, deve essercene una di "partenza"). In ciascuno dei nodi dei quadrati giungono due o quattro stradine, esclusi quei nodi che stanno sul perimetro e che non sono un vertice dell'accampamento; da questi nodi giungono tre stradine. Di conseguenza almeno una delle tre dovrà essere percorsa due volte. Ora si deve notare che, ripercorrendo una stradina per "uscire" da un nodo, si ottiene un ulteriore "ingresso" in un altro nodo. Dato che i nodi con numero dispari di stradine sono già collegati, si può cercare di "aggiungere stradine" in modo minimo per ottenere un numero pari di stradine confluenti in ogni nodo, ad esempio nella configurazione a fianco (dove si sono ridotte le dimensioni) le stradine aggiunte sono punteggiate e disegnate arcuate per indicare che si deve passare su ciascuna di quelle (cioè passare due volte sulla stradina non tratteggiata). Dunque, la minima lunghezza per coprire il reticolo entrando e uscendo da ogni nodo in totale un numero pari di volte è almeno uguale alla lunghezza totale del reticolo aumentata del semiperimetro, cioè $4837 + 64 + 37 = 4938$. Per accertarsi che questo minimo sia ottenibile con un effettivo percorso, vi sono molte soluzioni; ne proponiamo una schematicamente.



6. Una piazza è a forma di trapezio rettangolo con i lati paralleli di lunghezza 100 m e 30 m e il lato perpendicolare a questi di lunghezza 240 m. Sul pavimento della piazza sono tracciate le diagonali del trapezio. I quattro segmenti dal punto di incontro delle diagonali verso ciascuno degli angoli della piazza sono chiamati "percorsi meravigliosi". Qual è la lunghezza in centimetri del percorso meraviglioso più lungo?

   Siano $b_1 = 30$ m, $b_2 = 100$ m e $a = 240$ m. Il punto sul trapezio più lontano dal punto di incontro delle diagonali è l'intersezione della base maggiore con il lato obliquo. La distanza p tra questi si ottiene dalla similitudine dei triangoli formati con il punto di incontro delle diagonali e con una base in comune col trapezio. Visto che la diagonale maggiore è lunga $d = \sqrt{b_2^2 + a^2} = \sqrt{100^2 + 240^2} = 260$ m, si ha che $p = b_2 \dfrac{d}{b_1 + b_2} = 100 \dfrac{260}{30 + 100} = 200$ m.

7. Qual è la probabilità che i compleanni di Alberto, Barbara, Carlo e Daniela cadano in 4 giorni diversi della settimana? Si dia come risposta la somma di numeratore e denominatore della frazione ottenuta dopo aver semplificato tutti i fattori comuni.

   $\dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{7^4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{7^3} = \dfrac{120}{343}$, Risposta 463

8. Una profezia permetteva di determinare con precisione quale sarebbe stato l'anno N d.C. della fine del mondo. Il profeta dichiarava che la fine del mondo sarebbe avvenuta prima del 10000 d.C. e che i seguenti indizi erano sicuramente falsi o veri:
   1. Le frasi pari sono sempre vere.
   2. Le prossime due frasi sono entrambe false.
   3. Se a N tolgo il numero di frasi vere, si ottiene una potenza di 2.
   4. Se a N tolgo il numero della prima frase falsa, si ottiene un multiplo di 3.
   5. Le due frasi precedenti a questa sono entrambe vere.
   6. Tra le prime 6 frasi ce ne sono almeno 5 false.
   7. Il numero di divisori di N è dato dal numero di frasi false.
   8. Sottraendo a N il numero della prima frase falsa dopo questa, si ottiene una potenza di 3.
   9. Tra le ultime 7 frasi ci sono più frasi false che vere.
   10. Le frasi vere sono più di quelle false.
   11. Ci sono 5 frasi false consecutive.
   12. Se a N aggiungo il numero dell'ultima frase vera, si ottiene un multiplo di 7.
   13. Le ultime 3 frasi sono tutte vere o tutte false.

   Qual era l'anno indicato dal profeta?

   Supposta 6 vera, 2 e 5 sono false. Dunque una tra 3 o 4 è vera. Dunque 6 è falsa e 1 è falsa. Inoltre al massimo due sono false tra 2, 3, 4, 5. Supposte 2 e 5 false, una tra 3 o 4 è vera, cioè almeno tre sono false tra 2, 3, 4, 5. Dunque una tra 2 e 5 è vera. Supposta 2 vera, 3, 4, 5 sono false. Dunque, 2 è falsa, 5 è vera, così come 3 e 4. 9 è vera se e solo se 10 è falsa. Perciò 11 è falsa. Ne segue che 13 non può essere vera. Perciò 13 è falsa e 12 è vera. La situazione è la seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F	F	V	V	V	F					F	V	F

e

$N - 1$ è divisibile per 3

$N+12$ è divisibile per 7, cioè $N+5$ è divisibile per 7
9 è vera se e solo se 10 è falsa.
Supposto 10 vera (e 9 falsa), 7 e 8 sono vere. Perciò $N-9$ è una potenza di 3 e $N-7$ è una potenza di 2. Dunque 10 è falsa (e 9 vera); almeno una tra 7 e 8 è falsa. Supposto 8 vera, allora $N-10$ è una potenza di 3 e $N-6$ è una potenza di 2. Perciò 8 è falsa. La situazione è ora la seguente:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
F	F	V	V	V	F		F	V	F	F	V	F

Riassumendo, si sa che
$N-1$ è divisibile per 3
$N+5$ è divisibile per 7
$N-10$ non è una potenza di 3
N ha 7 divisori e $N-6$ è una potenza di 2, oppure N non ha 8 divisori e $N-5$ è una potenza di 2
Non ci sono potenze k di 2 minori di 10000 tali che $(k+6)-1=k+5$ è divisibile per 3 e $(k+6)+5=k+11$ è divisibile per 7. Le potenze k di 2 minori di 10000 tali che $(k+5)-1=k+4$ è divisibile per 3 e $(k+5)+5=k+10$ è divisibile per 7 sono 32 e 2048. Perciò N può essere 37 oppure 2053. Visto che 27 è una potenza di 3, la risposta è 2053.