Successioni e Logica

Preparazione Gara di Febbraio 2009

Gino Carignani

Progressione aritmetica

- è una successione di numeri tali che la differenza tra ciascun termine e il suo precedente sia una costante *d* (ragione)

$$a_n - a_{n-1} = d$$

$$a_1 = \alpha \quad a_2 = \alpha + d \quad a_3 = \alpha + 2d \quad \ldots a_n = \alpha + (n-1)d$$

Due formule per progressioni aritmetiche

- La differenza di due termini

$$a_r - a_s = (r - s)d$$

- La somma di n termini

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = n\frac{a_1 + a_n}{2}$$

Dimostrazione

$$\frac{n(a_1 + a_n)}{2} = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$S = (a_1) + (a_2) + (a_3) + \cdots + (a_n)$$
$$S = (a_n) + (a_{n-1}) + \cdots + (a_2) + (a_1)$$

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1)$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2d + a_n - 2d = a_1 + a_n$$

$$2S = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \cdots + (a_1 + a_n)$$

$$2S = n(a_1 + a_n)$$

Progressioni geometriche

- è una successione di numeri tali che il quoziente tra ciascun termine e il suo precedente sia una costante *q* (ragione)

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

$$a_1 = \alpha \quad a_2 = \alpha q \quad a_3 = \alpha q^2 \quad \ldots a_n = \alpha q^{n-1}$$

Somma di progressioni geometriche

- La somma di una progressione geometrica di n termini è data da

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Dimostrazione

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1\right)$$

$$(q-1)S = (q-1)\sum_{i=1}^{n} a_1 q^{i-1} =$$

$$= a_1(q-1)\left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1\right) = a_1\left(q^n - 1\right)$$

Altre identità

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Dipendenza dal termine precedente

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

$$se \quad \alpha \neq 1 \quad x_n = \alpha^n x_0 + \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}\beta$$

$$se \quad \alpha = 1 \quad x_n = x_0 + n\beta$$

Successione di Fibonacci

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \qquad a_0 = 0 \quad a_1 = 1$$

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 (=F10) ,
55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181 (=F20)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Gino Carignani

Dipendenza dai due precedenti

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta x_{n-1}$$

Si intendono fissati α, β, x_0, x_1

Si cercano le radici del polinomio

$$x^2 + \alpha x + \beta$$

$$se\ R_1 \neq R_2 \qquad x_n = aR_1^n + bR_2^n$$

$$se\ R_1 = R_2 = R \qquad x_n = aR^n + bnR^n$$

dove le costanti a e b sono determinate imponendo alla formula di valere per i valori iniziali x_0 *e* x_1.

Logica: connettivi

- Negazione (non) ~ oppure ¬
- Congiunzione (and) $\wedge$
- Disgiunzione (or) $\vee$
- Implicazione (Se…allora…) $\Rightarrow$

Quantificatori

- quantificatore universale (per ogni) $\forall$
- quantificatore esistenziale (esiste) $\exists$

De Morgan

$$\neg\left(p \wedge q\right) = \left(\neg p\right) \vee \left(\neg q\right)$$

$$\neg\left(p \vee q\right) = \left(\neg p\right) \wedge \left(\neg q\right)$$

Gino Carignani

Negare con i quantificatori

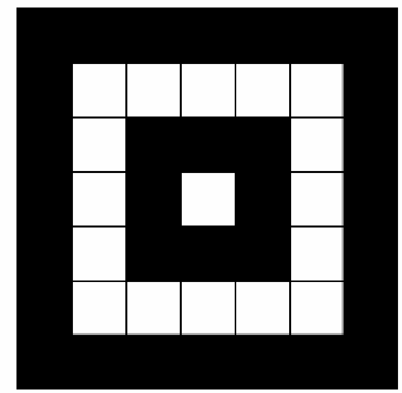
$$\neg(\forall x\ P(x)) = \exists x\ \neg P(x)$$

$$\neg(\exists x\ P(x)) = \forall x\ \neg P(x)$$

Fonti

- Massimo Gobbino, Schede olimpiche, Edizioni Cremonese 2005
- Piergiorgio Odifreddi, Il diavolo in cattedra, Einaudi 2003
- Esercizi anni precedenti, sito Olimpiadi

Es 2/2008



2. Il *So-poko* è un nuovo gioco enigmistico che si gioca su una tabella quadrata di lato 203 caselle. Le caselle sono colorate di bianco e di nero a cornici concentriche alternate; la cornice più esterna è nera, mentre la casella centrale è bianca (vedi a fianco un esempio 7×7). Qual è la differenza tra il numero di caselle nere e il numero di caselle bianche presenti nello schema?
(A) 103 **(B)** 203 **(C)** 207 **(D)** 303 **(E)** 407.

Es 5/2008

Siano $a_0, a_1, a_2, \ldots$ numeri interi tali che $a_0 = 19, a_1 = 25$,

e per ogni $n \geq 0$ valga $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$.

Qual è il più piccolo $i > 0$ per cui a_i è multiplo di 19?
(A) 19 **(B)** 25 **(C)** 38 **(D)** 44 **(E)** 50.

4/2008

Francesco e Andrea decidono di consultare l'oracolo matematico per sapere se hanno delle coppie $(x,\ y)$ di numeri (reali) fortunati. Per determinare la coppia (o le coppie) di numeri fortunati, l'oracolo chiede sia a Francesco che a Andrea il giorno (g) e mese (m) di nascita, dopodiché per ciascuno di loro risolve il sistema:

$$\begin{cases} 13x - y = 181 \\ gx - my = 362 \end{cases} .$$

Il responso dell'oracolo è che Andrea non ha nessuna coppia di numeri fortunati, mentre le coppie di numeri fortunati di Francesco sono infinite. Quale delle affermazioni seguenti è corretta?

(A) Francesco e Andrea sono entrambi nati in primavera
(B) Francesco e Andrea sono entrambi nati in estate
(C) Francesco e Andrea sono entrambi nati in autunno
(D) Francesco e Andrea sono entrambi nati in inverno
(E) Francesco e Andrea sono nati in stagioni diverse.

Es 6/2008

Sull'isola che non c'è ci sono 2008 abitanti, divisi in tre clan: i furfanti che mentono sempre, i cavalieri che non mentono mai, i paggi che mentono un giorno sì e uno no. Lorenza, in visita per due giorni, li incontra tutti il primo giorno. Il primo dice: "c'è esattamente un furfante sull'isola"; il secondo dice: "ci sono esattamente due furfanti sull'isola"...il 2008-esimo dice: "ci sono esattamente 2008 furfanti sull'isola". Il giorno dopo Lorenza li interroga di nuovo tutti nello stesso ordine. Il primo dice: "c'è esattamente un cavaliere sull'isola"; il secondo dice: "ci sono esattamente due cavalieri sull'isola"...l'ultimo dice: "ci sono esattamente 2008 cavalieri sull'isola".
Quanti paggi ci sono sull'isola?
(A) 0 (B) 1 (C) 1004 (D) 2006
(E) non è possibile determinarlo con i dati del problema.

15/2007

Lorenza si trova su una pista avente la forma di un poligono regolare con 2007 lati, i cui vertici sono numerati da 1 a 2007 in senso antiorario.

Lorenza, partendo dal vertice 6, salta ogni volta 4 vertici e cade sul quinto più avanti (ad esempio, dal 20 salta al 25), ma salta indietro di 2 vertici quando cade su un vertice identificato da una potenza di 2 (ad esempio, dopo un eventuale salto dal 27 al 32, deve saltare indietro al 30).

Dopo quanti salti Lorenza avrà oltrepassato per la prima volta il vertice 1?

Gino Carignani

16/2007

Una pulce si muove saltando avanti e indietro lungo una retta. La tana della pulce è un punto della retta.

Le regole di salto sono le seguenti:

- se la pulce si trova ad una distanza minore o uguale a un metro dalla tana, dopo il salto successivo si troverà ad una distanza doppia della precedente allontanandosi ancora di più dalla tana.
- se la pulce si trova ad una distanza d maggiore di un metro dalla tana, dopo il salto successivo si troverà ad una distanza 1 d dalla tana ma dalla parte opposta rispetto a quella dove si trova attualmente.

Se dopo 5 salti la pulce si trova a 80 cm dalla tana in una certa direzione, con quante sequenze distinte di salti può aver raggiunto quella posizione?

Gino Carignani

7/2007

Agli ultimi campionati del mondo di calcio, il girone A e terminato con la classica seguente:
Austria 7, Brasile 5, Camerun 4, Danimarca 0.
Austria e Camerun hanno subito una rete ciascuna.
Brasile e Camerun hanno segnato una sola volta, mentre l'Austria ha fatto tre reti.

Con che punteggio è terminata Austria-Danimarca?

Nota: Si ricorda che, in ogni partita disputata nel girone, la squadra vincitrice guadagna 3 punti, quella perdente 0 punti; in caso di pareggio ciascuna delle due squadre guadagna 1 punto.

(A) 1a0   (B) 2a1   (C) 2a0 (D) 0a0
(E) non puo essere determinata coi soli dati forniti.

2/2006

Consideriamo le quattro affermazioni seguenti:

Manuela ha un cane e un gatto.
Manuela non ha né un cane né un gatto.
Se Manuela ha un cane, allora ha anche un gatto.
Manuela non ha un cane, ma ha un gatto.

Quante di esse, al massimo, possono essere false contemporaneamente?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4.

4/2006

Gli abitanti di un'isola sono o furfanti o cavalieri: i cavalieri dicono sempre la verita, i furfanti mentono sempre.

Una sera al bar, Alberto dice: “Bruno è un cavaliere";
Bruno dice: “. . . . . . tutti e tre cavalieri" (in quel momento passa un camion e non si capisce se Bruno ha detto
“Siamo tutti. . . "
o “Non siamo tutti. . . ");
Carlo dice: “Bruno ha detto che non siamo tutti e tre cavalieri".

Quanti di loro sono cavalieri?
(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) non è possibile determinarlo.

3/2004

Quest'anno Alberto ha provato a imparare francese, inglese e tedesco. Sapendo che
(i) se sa il tedesco, allora sa anche francese e inglese;
(ii) se sa il francese, allora sa anche un'altra lingua tra inglese e tedesco;
(iii) se sa l'inglese, allora sa il tedesco ma non il francese;
quante di tali lingue sa Alberto?
(A) Nessuna **(B)** una **(C)** due **(D)** tre **(E)** non si può determinarlo.

4/2004?

Il professor Bianchi non dice mai bugie, tranne un giorno della settimana (sempre lo stesso) in cui mente sempre. Quanti sono i giorni della settimana in cui può aver affermato: *"se non ho detto bugie ieri ne dirò certamente domani"*?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.