Note relative alla lezione del 30 gennaio 2009 – Stage di preparazione alla gara provinciale delle Olimpiadi di Matematica 2009 – I.S.I. "Pertini" – Lucca

<u>Esercizio 1</u>

Come si calcola il numero delle distribuzioni diverse di n oggetti distinti in k contenitori ?

<u>Svolgimento</u>

Il calcolo del numero delle distribuzioni richieste avviene immaginando di attribuire a ciascun oggetto il numero corrispondente al contenitore in cui sistemarlo; per ogni oggetto ci sono pertanto k scelte a disposizione ed il valore richiesto è (schema moltiplicativo) $\alpha_n^k = k^n$.

Nel caso poi si ponga la condizione secondo la quale nessuno dei contenitori debba rimanere vuoto, il calcolo è decisamente più complesso.
Si può inizialmente osservare che il numero delle distribuzioni richieste è ottenibile dal numero totale $\alpha_n^k = k^n$ delle distribuzioni possibili diminuito della somma tra il numero delle distribuzioni nelle quali esattamente un contenitore rimane vuoto, il numero delle distribuzioni in cui esattamente due contenitori rimangono vuoti, il numero delle distribuzioni in cui esattamente tre contenitori rimangono vuoti e così via, fino al numero delle distribuzioni in cui esattamente $(k-1)$contenitori rimangono vuoti.
Nel caso in cui esattamente un contenitore rimane vuoto, la distribuzione degli oggetti assegnati avviene tra i rimanenti $(k-1)$contenitori a disposizione, nel caso in cui esattamente due contenitori rimangono vuoti, la distribuzione degli oggetti assegnati avviene tra i rimanenti $(k-2)$ contenitori a disposizione, nel caso in cui esattamente tre contenitori rimangono vuoti, la distribuzione degli oggetti assegnati avviene tra i rimanenti $(k-3)$ contenitori a disposizione e così via, finché, nel caso in cui esattamente $(k-1)$contenitori rimangono vuoti, la distribuzione degli oggetti assegnati avviene nell'unico contenitore rimasto a disposizione.

Adesso si deve però osservare che il calcolo del numero delle distribuzioni degli n oggetti assegnati nei k contenitori in modo che nessuno di essi rimanga vuoto, non può semplicemente essere effettuato mediante la sottrazione tra il valore $\alpha_n^k = k^n$ ed i valori corrispondenti relativi ai casi in cui i contenitori a disposizione sono, rispettivamente, $(k-1)$, $(k-2)$, $(k-3)$ e così via fino al caso di 1 solo contenitore a disposizione, ovvero mediante la formula
$\alpha_n^k - \left(C_{k-1}^k \alpha_n^{k-1} + C_{k-2}^k \alpha_n^{k-2} + C_{k-3}^k \alpha_n^{k-3} + ... + C_1^k \alpha_n^1\right)$, in cui i coefficienti C_i^k , con $1 \le i \le (k-1)$, determinano il numero di modi di scegliere, fra quelli dati, i contenitori da riempire con gli n oggetti assegnati, poiché in tal modo alcune distribuzioni verrebbero sicuramente sottratte più di una volta.
In effetti, ad esempio, nel conteggio $C_{k-1}^k \ \alpha_n^{k-1} = (k-1)^n$ sono considerate anche distribuzioni in cui alcuni dei $(k-1)$contenitori a disposizione rimangono vuoti, distribuzioni che vengono nuovamente considerate, ad esempio, al momento dei conteggi del tipo $C_{k-2}^k \alpha_n^{k-2}$.

Per arrivare alla formula corretta è necessario cambiare punto di vista: le distribuzioni degli oggetti in cui uno o più contenitori rimangono vuoti vengono descritte come unione insiemistica dei k insiemi (non disgiunti fra loro) indicati con $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$, essendo A_i , con $1 \le i \le k$, l'insieme delle distribuzioni degli n oggetti assegnati nelle quali il contenitore i-esimo rimane vuoto.

Di conseguenza si ha:

numero delle distribuzioni in cui uno o più contenitori rimangono vuoti = $\# \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ =

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \sum_{i=1}^{k} \# A_i - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \#(A_i \cap A_j) + \qquad (1)$$

$$+ \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{t=j+1}^{k} \#(A_i \cap A_j \cap A_t) - \ldots + (-1)^{k-1} \#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k)$$

La precedente formula (1) è detta "formula del principio di inclusione – esclusione" e rappresenta un'importante relazione della teoria elementare degli insiemi. La dimostrazione di tale formula può essere effettuata per induzione ed essa costituisce la generalizzazione della nota uguaglianza relativa alla cardinalità dell'insieme unione di due insiemi assegnati: $\# (A \cup B) = \# (A) + \# (B) - \# (A \cap B)$.

Si osserva facilmente che

$$\# A_i = \alpha_n^{k-1}$$

e che

$$\sum_{i=1}^{k} \# A_i = C_1^k \alpha_n^{k-1}.$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \#(A_i \cap A_j) = C_2^k \alpha_n^{k-2}.$$

$$\sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=i+1}^{k-1} \sum_{t=j+1}^{k} \#(A_i \cap A_j \cap A_t) = C_3^k \alpha_n^{k-3},$$

e così via.

D'altra parte,

$$\#(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) = 0,$$

cosicché l'ultimo termine non nullo della formula ottenuta è

$$(-1)^{k-2} C_{k-1}^k \alpha_n^1,$$

in modo tale che la formula finale del numero delle distribuzioni di *n* oggetti diversi in *k* contenitori, nell'ipotesi in cui nessun contenitore risulti vuoto, divenga:

$$\alpha_n^k - C_1^k \alpha_n^{k-1} + C_2^k \alpha_n^{k-2} - C_3^k \alpha_n^{k-3} + \ldots + (-1)^{k-1} C_{k-1}^k \alpha_n^1$$

oppure, in forma compatta,

$$\alpha_n^k + \sum_{p=1}^{k-1} (-1)^p C_p^k \alpha_n^{k-p}.$$

Poiché, del resto, $(-1)^0 C_0^k = 1$, alla fine si ottiene:

$$\boxed{\sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p C_p^k \alpha_n^{k-p}}$$

Si può subito notare che il valore che questa legge di calcolo fornisce è sicuramente maggiore del valore dato dalla la formula $\alpha_n^k - \left(C_{k-1}^k \alpha_n^{k-1} + C_{k-2}^k \alpha_n^{k-2} + C_{k-3}^k \alpha_n^{k-3} + ... + C_1^k \alpha_n^1\right)$, dalla quale il ragionamento era partito.

Esempio.
Supponendo di non avere limitazioni di spazio, stabilire in quanti modi si possono distribuire 8 libri diversi in 3 scaffali.

La risposta è pari a $\alpha_8^3 = 3^8 = 6561$.

Se si richiede che nessuno degli scaffali rimanga vuoto, il numero delle possibili distribuzioni degli 8 libri scende a $\alpha_8^3 - C_1^3 \alpha_8^2 + C_2^3 \alpha_8^1 = 3^8 - 3\ 2^8 + 3\ 1^8 = 5796$.

<u>Esercizio 2</u>

Determinare il valore massimo della quantità $(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$, al variare della variabile *x*.

<u>Svolgimento</u>
Dopo aver osservato che la quantità assegnata si annulla ovviamente se ad *x* si attribuiscono i valori 1, -1 oppure $-\frac{1}{2}$ e che essa risulta positiva se $-1 < x < -\frac{1}{2}$ oppure se $-\frac{1}{2} < x < 1$, si considera questo secondo caso, in cui tutti e tre le quantità $(1-x)$, $(1+x)$ e $(1+2x)$ risultano positive.
Di conseguenza si può ricorrere alla disuguaglianza notevole: Media geometrica ≤ Media aritmetica, dalla quale si deduce che

$$(1-x)^5(1+x)(1+2x)^2 \le \left(\frac{5(1-x)+(1+x)+2(1+2x)}{8}\right)^8 = 1^8 = 1.$$

In particolare, la disuguaglianza utilizzata diventa un'uguaglianza quando i termini sono tutti uguali tra loro, il che accade se $x = 0$. Si ricava allora che il valore del prodotto assegnato è massimo, per $-\frac{1}{2} < x < 1$, quando $x = 0$ e che tale valore massimo è 1.

La precedente tecnica dimostrativa non è però estendibile al caso in cui si abbia $-1 < x < -\frac{1}{2}$, nel quale i termini $(1+2x)$ singolarmente considerati risultano negativi, anche se quadrato $(1+2x)^2$ è ovviamente positivo.

In effetti, calcolando la funzione derivata della funzione prodotto $y = (1-x)^5(1+x)(1+2x)^2$,
si ottiene: $y' = (-2x)(1-x)^4(1+2x)(8x+7)$, il cui studio algebrico fornisce un punto di minimo relativo per $x = -\frac{1}{2}$, un punto di massimo relativo per $x = -\frac{7}{8}$ e per $x = 0$ ed un punto di flesso a tangente orizzontale per $x = 1$. Ne consegue che, poiché evidentemente $\lim_{x\to\pm\infty} y(x) = -\infty$,
il prodotto assegnato raggiunge il valore massimo assoluto se $x = -\frac{7}{8}$ e tale valore massimo è pari a $\frac{15^5 6^2}{8^8} = \frac{3^7 5^5}{2^{22}} = \frac{6834375}{4194304} \approx 1{,}629442$.

Paolo Nardini
Liceo Scientifico Statale “A. Vallisneri” - Lucca