

Stage Olimpico di Lucca

2 marzo 2010

Gara a squadre finale

- Si ricorda che per tutti i problemi occorre indicare le risposte come numero intero di quattro cifre compreso tra 0000 e 9999.
- Se la quantità richiesta non è un numero intero si indichi la sua parte intera.
- Se la quantità richiesta è un numero negativo, oppure se il problema non ha soluzione, si indichi 0000.
- Se la quantità richiesta è un numero intero maggiore di 9999 se ne indichino le ultime quattro cifre.
- Nello svolgimento dei calcoli può essere utile tener conto dei seguenti valori approssimati:

$$\sqrt{2} \approx 1.4142$$

$$\sqrt{3} \approx 1.7321$$

$$\sqrt{7} \approx 2.6458$$

$$\pi \approx 3.1416$$

1. Quanto vale la somma delle cifre di $2010^2 - 2009^2$? **[15 punti]**
2. Una pericolosissima bomba, possiede due interruttori che però sono guasti: anche se in posizione “spento”, il primo fa contatto ogni 100 minuti, il secondo ogni 104 minuti. In questo momento hanno appena fatto contatto simultaneamente e si sa che quando lo faranno di nuovo simultaneamente la bomba esploderà. Quanti minuti di tempo abbiamo per disinnescarla prima che esploda? (Gli interruttori da spenti fanno un contatto che dura solo un istante). **[20 punti]**
3. Quanti sono gli anagrammi della parola STAGISTA che contengono le lettere AIA consecutivamente? **[30 punti]**
4. Ad un torneo di pallacanestro partecipano n squadre e tutte le squadre si affrontano esattamente 2 volte (andata e ritorno, 2 punti per una vittoria, 0 per una sconfitta). Il torneo finisce con tutte le squadre a pari merito a 20 punti. Quante erano le squadre? **[30 punti]**
5. Un bastone cilindrico alto 235 cm e di circonferenza 4 cm presenta una scanalatura ad elica che inizia e finisce in corrispondenza dell’inizio e della fine di un segmento verticale (lungo quanto l’altezza del cilindro, cioè 235 cm) che viene diviso dalla scanalatura in 141 parti uguali. Quanti centimetri (al minimo) è lunga la scanalatura? **[50 punti]**
6. Se $xy = 4$ e $x^3 + y^3 = 144$, quanto vale $x^2 + y^2$? **[50 punti]**
7. Sia D il prodotto di tutti i divisori di 216. Quanto vale $\sqrt[8]{D}$? **[50 punti]**

8. Sia ABC un triangolo con AC lungo 127 e sia D un punto sul prolungamento del lato AB dalla parte di B tale che $CD = 310$. Calcolare il rapporto tra il raggio R_1 della circonferenza circoscritta ad ABC e il raggio R_2 di quella circoscritta a BCD e scrivere la somma tra numeratore e denominatore ridotti ai minimi termini. **[30 punti]**
9. Per quali numeri naturali positivi n si ha che $\frac{n^2 + 11}{n + 1}$ è un numero naturale? Scrivere il prodotto di essi. **[40 punti]**
10. Sia S l'unione di 6 cerchi, ciascuno di raggio 10 metri, aventi come diametro ciascuno un lato di un esagono regolare. Quanto misura l'area di S ? **[40 punti]**
11. Quanto vale il minimo dell'espressione $x^2 + y^2 + 2x - 3y + 33$ al variare di x e y tra i numeri reali? **[40 punti]**
12. Su un arcipelago disabitato di 13 isole vengono fondate 25 città in modo che su ogni isola ce ne sia almeno una. Se si vuole che due città su isole differenti siano sempre collegate da una linea di traghetti, quante linee ci saranno al minimo? **[60 punti]**
13. Se $x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$, quanto vale $|x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 81x + 69|$? **[80 punti]**
14. Quanto vale la somma dei divisori di $6^6 + 9^6 + 6^6 + 4^6$? **[100 punti]**
15. Gli spigoli e le diagonali delle facce di un cubo di lato 20 iscritto in una sfera sono realizzati in fil di ferro. Se al centro della sfera si trova una piccola candela, quanti centimetri è lunga in totale l'ombra del fil di ferro sulla sfera? **[90 punti]**
16. In una gara a squadre ci sono 16 quesiti e ogni squadra in ciascun quesito può totalizzare 5, 1 o 0 punti. Qual è il numero minimo di squadre necessario affinché nella classifica finale ce ne siano necessariamente due a pari merito? **[80 punti]**

Stage Olimpico di Terni
3-5 febbraio 2010

Gara a squadre finale
Risposte

1. 0014
2. 2600
3. 0180
4. 0011
5. 0611
6. 0028
7. 0216
8. 0437
9. 0330
10. 1776
11. 0029
12. 0222
13. 0123
14. 2289
15. 0653
16. 0076